SESSION 2005

Concours d'admission en première année du Cycle de Formation d'Architectes de l'Institut National des Sciences Appliquées de Strasbourg

Épreuves écrites

MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures - Coefficient : 2

Note : cette épreuve comprend quatre exercices indépendants.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

EXERCICE I

Dans cet exercice, p est un réel strictement positif. Le plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $\left(\mathcal{P}\right)$ la parabole d'équation $y=\dfrac{x^2}{2p}$.

Montrer que le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à $\left(\mathcal{P}\right)$, orthogonales, est la droite $\left(\mathcal{D}\right)$ d'équation $y=-\dfrac{p}{2}$.

EXERCICE II

Dans cet exercice, on identifie le plan affine euclidien $\mathcal{E}_2$ au plan complexe $\mathbb{C}$, muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On pose $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha=\omega+\dfrac{1}{\omega}$ et $\beta=-1-\alpha$.

1. Démontrer que α et β sont les racines du polynôme X^2+X-1.

2. Préciser le centre et les points d'intersection avec les axes de coordonnées du cercle $\left(\Gamma\right)$ d'équation $y^2+x^2+x-1=0$.

3. Démontrer que les points d'abscisses α, β et 2 du cercle $\left(\mathcal{C}\right)$ de centre O, de rayon 2 sont les sommets d'un pentagone régulier.

4. Construire soigneusement à la règle et au compas un pentagone régulier.

EXERCICE III

Rappel :

Soit n un entier naturel non nul.

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$, $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, n réels tels que pour tout entier k de l'intervalle $[0, n-1]$, c_k appartient à l'intervalle $\left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) = \int_a^b f(x)\,dx .$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx .$$

1. Soit, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$.

   Calculer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Dans cette question, f désigne une fonction réelle de classe C^1 sur $[0,1]$, n un entier naturel non nul.
   On pose :

   - $R_n = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$,
   - Pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

   a. Montrer que la fonction F est de classe C^2 sur $[0,1]$.

   b. Prouver que : $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)\right]$.

   c. ***Cette question est <u>facultative</u>.*** *On pourra admettre le résultat suivant pour répondre à la question d.*
   Expliquer pourquoi, pour tout entier k de l'intervalle $[0, n-1]$, il existe un réel c_k appartenant à l'intervalle $\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tel que :

   $$F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n^2}F''(c_k) .$$

   d. En déduire que nR_n tend vers $\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Montrer que $u_n - \lim_{n\to+\infty} u_n$ est équivalent à $\frac{1}{4n}$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE IV

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base du noyau et de l'image de f. Ces deux espaces sont-ils supplémentaires ?
2. Montrer que $f\circ f=-f$ et déterminer une base (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à la matrice :

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$